Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Grado

Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos

Autor

Daniel Crespo Estage

Director/es

Joaquín Andaluz Funcia
Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa
2014

Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos

Daniel Crespo Estage

Resumen

El modelo de Hotelling es el paradigma en el estudio de la competencia espacial. Con el desarrollo de la teoría de diferenciación horizontal del producto se extiende a otras vertientes de la microeconómia convirtiéndose en un referente. En la literatura reciente se aborda el análisis dinámico del equilibrio en mercados duopolísticos. Siguiendo esta línea, en este trabajo se desarrolla el modelo de Hotelling con costes cuadráticos en un contexto dinámico atendiendo a diferentes formulaciones de las expectativas, en concreto expectativas con racionalidad limitada, expectativas adaptativas y expectativas heterogéneas. La variedad de resultados encontrados abarca casos como estabilidad asintótica del equilibrio, inestabilidad e incluso dinámica compleja. Se concluye que el principio de máxima diferenciación es compatible con la estabilidad del equilibrio de Nash, siempre que la velocidad de ajuste de las empresas sea lo suficientemente baja. Con el objeto de ilustrar el comportamiento del modelo son presentadas una serie de simulaciones, atendiendo al caso en el que nos encontremos, las cuales permiten comprender la evolución temporal de las variables.

Lo que motivó la elección de esta línea de trabajo fue mi interés por la dinámica y por la teoría microeconómica como piedra angular de otras vertientes económicas. La posibilidad de simular el modelo fue un aliciente en el momento de decidirme por este trabajo.

Abstract

Hotelling's model is the paradigm in Spatial Competition Theory. Whith the development of the horizontal product differentiation, this model was spread to other microeconomic aspect becoming it into a referent. In the recent literature can be

found dynamic analysis of equilibrium in duopolist market. Following this idea, in this essay is developed Hotelling's model with quadratic costs paying attention to different formulations of expectations, specifically with bounded rationality, adaptative expectations and heterogeneous expectations. The variety of results found cover cases like Asintotic Stability, Inestability or Complex Dynamic. Is included that the Principle of Maximum Differentiation is compatible with Stability of Nash's Equilibrium as long as speed adjustment of the firms was low enough. In order to illustrate the behaviour of this model are intoduced some simulations, attending to the case we are studing, wich allow understand the temporary evolution of variables.

The reason that motivate me to choose this line of work was my interest in Dynamic and Microeconomic Theory like a cornerstone of other microeconomic aspects. The opportunuty to simulate this model was an incentive at the moment of decide this workpaper.

Índice

1 INTRODUCCIÓN

En el modelo original de Hotelling (1929) dos empresas ofrecen un producto homogéneo a un conjunto de consumidores distribuidos uniformemente a lo largo de una calle, representada por un segmento de longitud $l : [0, l]$.

En dicho modelo, las empresas deciden secuencialmente su localización espacial y el precio. El equilibrio es el resultado de un juego dinámico en dos etapas: en la primera se compite mediante la localización y en la segunda, a través de los precios.

Suponiendo que cada consumidor soporta un coste de transporte lineal en la distancia entre su localización y la de las empresas (política de precios f.o.b.[1]), Hotelling concluye que las empresas se localizarán en el centro del mercado.

Boulding (1966) denomina a este resultado el *principio de mínima diferenciación*, el cual ha trascendido a los modelos puramente espaciales. Estableciendo la equivalencia entre localización y el tipo de variedad del producto, este principio explica el comportamiento al lanzar productos muy similares y constituye un resultado fundamental en los modelos de diferenciación horizontal del producto.

Cincuenta años más tarde, D'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) demostraron que el principio de mínima diferenciación es incompatible con la existencia del equilibrio perfecto en subjuegos de localizaciones y precios. Sustituyendo la función de costes de transporte lineal por una especificación cuadrática, logran asegurar la existencia de equilibrio pero, en este caso, el comportamiento de las empresas en la primera etapa consiste en localizarse en los extremos del segmento, dando lugar al llamado *principio de la máxima diferenciación*. En términos de variedad de producto el principio de máxima diferenciación es identificado con el comportamiento de las empresas al lanzar productos con carácteristicas diferentes.

A raíz de los resultados anteriores ha surgido una abundante literatura tendente a recuperar el principio de la diferenciación mínima introduciendo modificaciones al modelo original de Hotelling (1929), tales como especificaciones más generales de los costes de transporte, la consideración de la demanda elástica o la sustitución de la competencia en precios por la competencia en cantidades; para una revisión literaria en profundidad veáse Andaluz (1995). No obstante, todos los trabajos consideran un contexto estático o equi-

[1] Free on board

valentemente un contexto dinámico donde las empresas toman sus decisiones de acuerdo a unas expectativas ingenuas (naive expectations).

La necesidad de dinamizar el modelo de Hotelling nace de la visión sesgada que proporcionan en su mayoría los modelos estáticos al no incorporar la dimensión temporal. La generación de expectativas de los agentes sobre las variables económicas requiere un tratamiento específico en el momento de modelar el comportamiento de los agentes.

En la literatuara encontramos artículos tales como el de Tramontana (2010) y Fanti (2013) en los que se aborda el análisis de mercados duopolistas. En el artículo de Tramontana (2010) se analiza un duopolio en el que empresas con expectativas heterogénas se enfrentan a una demanda isoelástica y en Fanti (2013) se estudia la estabilidad local de un duopolio a la Bertrand con diferenciación vertical y expectativas heterogéneas.

Objetivo del trabajo:

En este contexto, el objetivo del presente trabajo es analizar en un marco dinámico la estabilidad local del equilibrio de Nash en precios en el modelo de Hotelling (1929) con costes cuadráticos. En concreto, analizamos las condiciones que deben cumplir las localizaciones de las empresas (grado de diferenciación del producto) para que el equilibrio en precios sea asintóticamente estable.

El análisis dinámico exige introducir supuestos sobre el comportamiento de las empresas a lo largo del tiempo. En este trabajo el estudio se realiza considerando distintas expectativas de los jugadores, en concreto expectativas con racionalidad limitada y expectativas adaptativas.

Materias y asignaturas relacionadas con el trabajo:

La elaboración del trabajo combina conocimiento de Economía Industrial y Análisis Dinámico. Por tanto, permite demostrar habilidades adquiridas en diferentes asignaturas tales como Microeconomía IV, Matemáticas II y Decisión y juegos.

Si bien es cierto que en otras asignaturas tales como Microeconomía II y Economía Pública es presentado el modelo de Hotelling, en Microeconomía IV se profundiza en él.

En Decisión y juegos se formalizan y consolidan conceptos tales como función de mejor respuesta y equilibrio de Nash.

En Matemáticas II son estudiadas las ecuaciones diferenciales, que son herramientas propias de la dinámica en tiempo continuo. En este trabajo se considera el tiempo como una variable discreta con lo que ha sido necesario ampliar estos conocimientos adquiridos en tiempo continuo y extenderlos a discreto. Las herramientas matemáticas empleadas son las ecuaciones en diferencias. La simulación de los modelos requiere de programas matemáticos, en particular ha sido empleado el programa Wolfram Mathematica 7.0.

Estructura

El presente trabajo se desarrolla a lo largo de dos bloques. En el primer bloque se presenta el modelo original de Hotelling tanto con costes lineales como costes cuadráticos, así como la formulación de las expectativas de los agentes necesaria para el análisis dinámico.

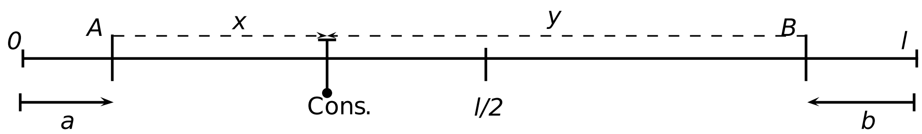
En el segundo bloque se modela y resuelve en un contexto dinámico el modelo de Hotelling con costes cuadráticos atendiendo a las diferentes especificaciones en la generación de expectativas, en particular se resuelve con expectativas con racionalidad limidad, expectativas adaptativas y expectativas heterogéneas. El trabajo finaliza con la exposición de los resultados derivados del análisis dinámico.

2 EL MODELO DE HOTELLING

En el modelo original de Hotelling (1929), dos empresas A, B, se situan a lo largo de una calle representada por el segmento $[0, l]$. La primera decisión a la que se enfrentan las empresas es decidir la localización a lo largo de la calle.

Denotamos la localización de la empresa A por a, $a \in [0, l]$ que es la distancia desde el origen del segmento hasta el punto A, $a = d(0, A)$. Denotamos la localización de la empresa B por b, $b \in [0, l]$, donde b representa la distancia desde el punto B hasta el extremo final del segmento $b = d(B, l)$. Ambas empresas comercializan un producto homogéneo a lo largo del mercado representado por el segmento $[0, l]$.

Los consumidores se distribuyen uniformenente sin tener preferencia alguna por una u otra empresa. Éstos han de soportar un coste de transporte lineal c. El precio que han de soportar es $p_1 + cx$, si son consumidores de la empresa A, ó $p_2 + cy$, si son consumidores de la empresa B, donde x, y representa la distancia de dicho consumidor hasta la empresa A y B respectivamente.



Este modelo de competencia en localización y precios ideado por Hotelling adquiere una mayor dimensión al ser aplicado en ámbitos propios de la diferenciación horizontal de productos. La diferencia entre mercados concentrados o dispersos tiene equivalencia entre los mercados con un producto homogéneo y aquellos que están diferenciados (en el sentido de características de Lancaster (1979)). Las analogías entre ambos enfoques son:

- El espacio geográfico es identificado con el espacio de características.
- La localización del consumidor puede ser identificada con la variedad ideal del consumidor.
- La localización de la empresa con la variedad ofrecida.
- El coste de transporte con la pérdida de utilidad que el consumidor padece al alejarse de su variedad ideal.
- La función de costes de transporte con la función de compensación.

De hecho existe una abundante literatura en la que se toma como referencia el modelo original de Hotelling para el estudio de las diferenciación del producto como por ejemplo Lipsey (1975), Economides (1984) y Gabszewicz (1986a).

En función de las características propias de los distintos productos de una industria se distinguen dos clases de diferenciación: diferenciación vertical del producto y diferenciación horizontal del producto.

En la diferenciación vertical para unos precios dados todos los consumidores están de acuerdo respecto a la ordenación de la categoría o calidad de los productos. Esta diferenciación está basada en aquellas características del producto que todos los consumidores valoran de igual modo.

En la diferenciación horizontal las características de un producto distintas a la calidad son valoradas de forma diferente por cada uno de los consumidores. En este caso, a precios similares, cada producto se sitúa en el espacio de características.

Al incorporar las características de los productos en la toma de decisiones las empresas contemplan su posicionamiento o localización respecto a sus rivales, convirtiéndose así la característica del producto en una variable estratégica.

2.1 Supuestos

1. El coste marginal de producción de las empresas es constante (cero sin pérdida de generalidad) y ambas empresas cuentan con la misma tecnología.

2. La cantidad lanzada al mercado es consumida en su totalidad.

3. Los consumidores no tienen preferencia por ninguna de las dos empresas.

4. El producto es homogéneo.

5. El mercado esta representado por un segmento de longitud l.

6. Los consumidores se distribuyen uniformenente por el mercado y tienen un precio de reserva lo suficientemente alto como para adquirir una unidad (supuesto de demanda inelástica).

7. El precio al que ofertan es f.o.b.

2.2 Resolución

El consumidor indiferente es aquel que cumple que $p_1 + cx = p_2 + cy$. Dado que $l = a+b+x+y$ el consumidor indiferente queda caracterizado por la siguientes expresiones:

$$x(a,b) = \frac{p_2 - p_1 + c(l-a-b)}{2c}$$
$$y(a,b) = \frac{p_1 - p_2 + c(l-a-b)}{2c}$$

De las expresiones de los consumidores indiferentes obtenemos las funciones de demanda de cada una de las empresas:

$$q_1 = x + a = \begin{cases} \frac{p_2-p_1+c(l+a-b)}{2c} & \textit{si:} \quad |p_1 - p_2| \leq c(l-a-b) \\ l & \textit{si:} \quad p_1 < p_2 - c(l-a-b) \\ 0 & \textit{si:} \quad p_1 > p_2 - c(l-a-b) \end{cases} \tag{1}$$

$$q_2 = y + b = \begin{cases} \frac{p_1-p_2+c(l+b-a)}{2c} & \textit{si:} \quad |p_1 - p_2| \leq c(l-a-b) \\ l & \textit{si:} \quad p_2 < p_1 - c(l-a-b) \\ 0 & \textit{si:} \quad p_2 > p_1 - c(l-a-b) \end{cases} \tag{2}$$

La demanda (a, b) que atrapan las empresas (A, B), respectivamente, se denomina demanda cautiva.

El beneficio Π_i, para la emprea i es $\Pi_i = p_i q_i$, $i = 1, 2$, dado q_i en (1) y (2). Excluyendo los casos en los que no se cumple que: $|p_1 - p_2| \leq c(l-a-b)$, la resolución del juego se hace mediante inducción hacia atrás. Es decir, primero se calculan los precios óptimos y, en segundo lugar, se obtiene la localización óptima dado el precio óptimo. Las funciones de beneficio para cada empresa son:

$$\Pi_1 = p_1 \left(\frac{p_2 - p_1 + c(l+a-b)}{2c} \right)$$
$$\Pi_2 = p_2 \left(\frac{p_1 - p_2 + c(l+b-a)}{2c} \right)$$

De las condiciones de primer orden del problema de maximización[2] $\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0, i = 1, 2 \right)$ se obtienen las funciones de reacción:

$$R_1(p_2) = \frac{p_2 + c(l+a-b)}{2} \tag{3}$$
$$R_2(p_1) = \frac{p_1 + c(l+b-a)}{2} \tag{4}$$

[2]Dado que: $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p i_i^2} = -\frac{1}{c} < 0, i = 1, 2$, se garantiza las condiciones de máximo.

Resolviendo el sistema dado por (3) y (4) se obtinen los precios de equilibrio.

$$p_1^* = p_1^*(a,b) = c\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right) \tag{5}$$

$$p_2^* = p_2^*(a,b) = c\left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right) \tag{6}$$

Sustituyendo p_1^*, p_2^* en las funciones de beneficio:

$$\Pi_1(p_1^*, p_2^*, a, b) = \frac{c}{2}\left[l + \frac{1}{3}(a-b)\right]^2 \tag{7}$$

$$\Pi_2(p_1^*, p_2^*, a, b) = \frac{c}{2}\left[l + \frac{1}{3}(b-a)\right]^2 \tag{8}$$

El beneficio de las empresas en la segunda etapa queda tal y como se establece en (7) y (8).

Las empresas deciden la localización en la primera etapa, en función del comportamiento óptimo en la segunda etapa, por lo que dado el beneficio en (7) y (8) y que

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a} = \frac{c}{3}\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right) > 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial b} = \frac{c}{3}\left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right) > 0$$

las empresas tenderán a desplazarse hacia el centro del mercado. Este resultado es el principio de mínima diferenciación al que se refiere Boulding (1966).

Podemos ver el principio de mínima diferenciación cuando dos cadenas de comida rápida se situan una junto a la otra o dos gasolineras en una autopista que tienden a juntarse una con la otra. Otro ejemplo de mínima diferenciación en un contexto espacial lo encontramos en la concentración típica del comercio en el que las tiendas que ofertan productos similares se concentran a lo largo de la misma zona.

Extendiendo el principio de mínima diferenciación más allá de un contexto espacial tenemos por ejemplo el comportamiento de las cadenas de televisión en una franja horaria determinada en la que la programación entre ellas es muy homogénea.

Otro ejemplo de mínima diferenciación lo encontramos en el mercado de coches en el que automóviles de la misma gama tienen apariencia similar y mismas prestaciones.

En otras disciplinas también se aplica el principio de mínima diferenciación, en particular este principio da respuesta al comportamiento de los partidos políticos al tender a concentrarse en el centro del espectro político con el objeto de alcanzar el mayor número posible de electores.

2.3 Correción de D'Aspremont

D'Aspremont, Gabszewicz y Thisee (1979) resuelven el modelo de Hotelling y concluyen que los precios (5) y (6) son equilibrio de Nash si las empresas están lo suficientemente separadas. De hecho si $a = b = \frac{l}{2}$ entonces $p = (0, 0)$ dando lugar a la *paradoja de Bertrand*. La mejor respuesta de las empresas en este caso es $p_i = p_j - \varepsilon$, hasta alcanzar el equilibrio.

Como demuestran D'Aspremont et al (1979), el precio tiene que condicionar el equilibrio en todo el espacio de estrategias, de tal manera que el beneficio con precios de equilibrio ha de ser mayor que el beneficio en el que un solo competidor abastece todo el mercado. Para que (5) y (6) constituyan un equilibrio de Nash se debe cumplir que:

$$\begin{cases} \Pi_1(p_1^*, p_2^*) > \Pi_1(p_1, p_2^*) \\ \Pi_2(p_1^*, p_2^*) > \Pi_2(p_1^*, p_2) \end{cases} \qquad \forall p_1, p_2$$

Para demostrar esta condición ha de tenerse en cuenta que para que (5) y (6) sea un equilibrio de Nash tiene que cumplirse que:

$$\Pi_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{c}{2}\left[l + \frac{1}{3}(a-b)\right]^2 > l\left(p_2^* - c(l-a-b) - \varepsilon\right) \tag{9}$$

$$\Pi_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{c}{2}\left[l + \frac{1}{3}(b-a)\right]^2 > l\left(p_1^* - c(l-a-b) - \varepsilon\right) \tag{10}$$

para $a + b < l$. Sustituyendo los precios de equilibrio (5) y (6) en (9) y (10), tenemos que son equilibrio de Nash si y solo si se cumple que:

$$\begin{cases} \left(l + \frac{a-b}{3}\right)^2 > \frac{4}{3}l\,(a+2b) \\ \left(l + \frac{b-a}{3}\right)^2 > \frac{4}{3}l\,(b+2a) \end{cases} \tag{11}$$

De donde se deduce que las empresas están lo suficientemente separadas.

3 COSTES CUADRÁTICOS

El modelo que se desarrolla en las sucesivas secciones se fundamenta en el modelo de D'Aspremont, Gabszewicz y Thisee (1979) en el que se modifica el modelo de Hotelling, considerando que los consumidores soportan costes cuadráticos.

Los supuestos de este modelo son iguales que los que establece Hotelling, presentados en 2.1, excepto en la especificación de los costes de transporte que se consideran cuadraticos $C(x) = cx^2$.

Al igual que en el modelo básico el desarrollo del juego se realiza en dos etapas. En la primera las empresas eligen la posición o la variedad que lanzan al mercado. En la segunda etapa se deciden los precios. La resolución del modelo se realiza mediante inducción hacia atrás.

El consumidor marginal es aquel que cumple que $p_1 + cx^2 = p_2 + cy^2$ y dado que $l = a + b + x + y$ pueden ser obtenidas las funciones de demanda de cada empresa. La demanda a la que se enfrenta cada empresa toma la siguiente forma.

$$q_1 = x + a = \begin{cases} a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} & \textit{si:} \quad 0 \leq a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \leq l \\ l & \textit{si:} \quad a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} > l \\ 0 & \textit{si:} \quad a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} < 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$q_2 = y + b = \begin{cases} b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} & \textit{si:} \quad 0 \leq b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \leq l \\ l & \textit{si:} \quad b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \geq l \\ 0 & \textit{si:} \quad b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Sustituyendo en las funciones de beneficio de las empresas tenemos que:

$$\Pi_1(p_1, p_2) = p_1 q_1 = p_1 \left[a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \right] \tag{14}$$

$$\Pi_2(p_1, p_2) = p_2 q_2 = p_2 \left[b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \right] \tag{15}$$

El problema al que se enfrentan las empresas en la segunda etapa es maximizar el beneficio en función de los precios de los productos que lanzan al mercado. Las condiciones de primer orden del problema de maximización[3] son: $\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0, i = 1, 2$.

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = a + \frac{p_2 - p_1}{2c(l-a-b)} - \frac{p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = b + \frac{p_1 - p_2}{2c(l-a-b)} - \frac{p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} = 0 \tag{17}$$

[3]Dado que $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial pi_i^2} = -\frac{1}{c(l-a-b)} < 0, i = 1, 2$ se garantiza las condiciones de segundo orden de máximo.

Despejando $p_i(p_j), i, j = 1, 2, i \neq j$ se obtienen las funciones de mejor respuesta de las empresas.

$$p_1(p_2) = \frac{1}{2}\left[c(l-a-b)(l+a-b)+p_2\right] \tag{18}$$

$$p_2(p_1) = \frac{1}{2}\left[c(l-a-b)(l+b-a)+p_1\right] \tag{19}$$

El equilibrio de Nash en este subjuego es la intersección de las funciones de mejor respuesta (de las funciones de reacción), sean las que sean las localizaciones, caracterizadas por (a, b), de las empresas.

$$p_1^* = \left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right) c(l-a-b) \tag{20}$$

$$p_2^* = \left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right) c(l-a-b) \tag{21}$$

En la primera etapa las empresas deciden las localizaciones atendiendo al comportamiento óptimo en la segunda etapa. Sustituyendo los precios de equilibrio en las funciones de beneficio se obtiene el beneficio de las empresas dados los precios en la segunda etapa.

$$\Pi_1^* = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right)^2 (l-a-b)$$

$$\Pi_2^* = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right)^2 (l-a-b)$$

La respuesta óptima la encontramos derivando respecto a las localizaciones, $\frac{\partial \Pi_1}{\partial a}, \frac{\partial \Pi_2}{\partial b}$.

$$\frac{\partial \Pi_1^*}{\partial a} = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right)\left(-\frac{l}{3} - \frac{b}{3} - a\right) < 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2^*}{\partial b} = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right)\left(-\frac{l}{3} - \frac{a}{3} - b\right) < 0$$

Al ser negativa las empresas tenderán a separarse. Como consecuecia, en este modelo las empresas se diferenciarán lo máximo posible una de otra.

La diferenciación de producto que realizán las empresas viene a corroborar el principio de máxima diferenciación. Como por ejemplo la aparición de marcas blancas en ciertas cadenas de supermercados frente a otros supermercados que carecen de las mismas. Otro ejemplo lo encontramos en la industria cervecera en la que las empresas tienden a diferenciarse mediante graduaciones alcohólicas diferentes. Un ejemplo claro de máxima diferenciación ha sido en mercado automovilístico en el que ciertas empresas han lanzado coches con estética de todoterreno. La reacción del resto, una vez que la empresa se ha diferenciado, ha sido imitar este comportamiento tendiendo hacia el principio de mínima diferenciación.

4 DINAMIZACIÓN DEL MODELO

La dinamización del modelo se realiza en un contexto discreto, es decir, los agentes toman sus decisiones en un período y las mantienen hasta el siguiente período. Para modelar este tipo de comportamiento han de ser empleadas las ecuaciones en diferencias que atienden a variaciones finitas de las variables, frente a las ecuaciones diferenciales que atienden a variaciones infinitesimales de las mismas.

Al ser tratado un modelo de duopolio el comportamiento ha de ser caracterizado mediante un sistema dinámico discreto bidimensional.

El equilibrio se presenta como un concepto clave en el análisis dinámico. Entendemos equilibrio como aquellos valores en los cuales las variables del sistema se mantienen constantes, es decir, en ausencia de cualquier shock exógeno el nivel de las variables no varían. También se denomina estado estacionario.

Entendemos que un equilibrio dinámico es estable si, dada una perturbación, toda la secuencia de movimientos posteriores se mantienen en torno a una vecindad del equilibrio tan pequeña como se quiera, en caso contrario es inestable.

Si además de estable, todo movimiento que empieza suficientemente cerca del punto de equilibrio converge hacia el equilibrio, entonces el equilibrio es asintóticamente estable.

Si la estabilidad es independiente de la distancia desde el estado inicial hasta el punto de equilibrio entonces la estabilidad es global. Si depende de la distancia será local.

Dependiendo del tipo de expectativas empleadas nos encontramos que los sistemas dinámicos adoptan diferentes formas, en particular adoptan la forma de sistemas dinámicos lineales dos por dos y sistemas dinámicos no lineales dos por dos.

En el caso del sistema lineal el análisis de la estabilidad del estado estacionario se realiza sobre los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dado, que es constante.

La condición que ha de cumplirse para que exista estabilidad asintótica del punto de equilibrio es que el módulo de los valores propios de la matriz jacobiana sean menores que uno. Si uno de los valores propios es de módulo mayor que uno el equilibrio será asintóticamente estable.

Para comprobar la condición de estabilidad existen unas condiciones llamadas las condiciones de Shur, las cuales nos permiten discernir las condiciones de estabilidad en términos de la traza y el determinante de la matriz sin necesidad de calcular los valores propios. Estas condiciones se especifican en el apartado 4.2

En el caso en que el sistema sea no lineal el análisis de la estabilidad se realiza de forma indirecta. El procedimiento consiste en linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio mediante un desarrollo de Taylor. Dada la rápida convergencia de los términos mayores que uno éstos pueden ser truncados, con lo que obtenemos la linealización del sistema en un entorno del equilibrio. Es por tanto sobre la jacobiana del sistema no lineal evaluada en el punto de equilibrio en la que se realiza el análisis de estabilidad de forma análoga al caso lineal. Hay que señalar que si existe un valor propio de matriz jacobiana de módulo uno, esta linealización no es valida.

Para una revisión en profundidad, de estos conceptos e instrumentos matemáticos puede verse Fernández et al (2003) y Gandolfo (2010). La aplicación de estas técnicas en el análisis dinámico puede verse en los artículos de Tramontana (2010) y Fanti et al (2013).

4.1 Expectativas

La incorporación de la dinámica al modelo requiere modelar el comportamiento de los agentes económicos respecto al futuro. Ante la incertidumbre los agentes han de establecer mecanismos que les permitan la toma de decisiones. El comportamiento de los agentes está condicionado por las expectativas que proyectan sobre el futuro.

Consideremos dos empresas que compiten en precios en tiempo discreto. Denotamos los precios lanzados por cada una de las empresas en el momento t como $p_i(t)$ y $p_i(t+1)$ en el siguiente período $t+1$, para $i = 1, 2$.

El problema al que se enfrentan las empresas es decidir el precio al que lanzar el producto en el siguiente momento.

$$\begin{cases} p_1(t+1) = \text{argmax}_{p_1} \Pi_1(p_1(t), p_2^e(t+1)) \\ p_2(t+1) = \text{argmax}_{p_2} \Pi_2(p_2(t), p_1^e(t+1)) \end{cases} \tag{22}$$

donde $\Pi_i(\cdot, \cdot)$ denota el beneficio de la empresa i y $p_j^e(t+1)$ representa las expectativas de la empresa i sobre el precio que lanzará la empresa $j (j = 1, 2, j \neq i)$. Si el problema de optimización tiene solución única se definen las funciones de reacción o funciones de mejor respuesta como:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = f(p_2^e(t+1)) \\ p_2(t+1) = g(p_1^e(t+1)) \end{cases} \tag{23}$$

El caso más simple es el de las expectativas ingenuas. En este caso los agentes esperan que el rival se comporte el próximo periodo igual que el presente. De tal manera que $p_i^e(t+1) = p_i(t), i = 1, 2$ y el modelo queda así:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = f(p_2(t)) \\ p_2(t+1) = g(p_1(t)) \end{cases} \tag{24}$$

El modelo original de Hotelling desarrollado en un contexto estático proporciona el mismo resultado que se alcanzaría en un contexto dinámico en el que los agentes presentan expectativas ingenuas. No obstante, bajo otro tipo de expectativas, dicha equivalencia no se cumple. Es el caso de expectativas con racionalidad limitada y expectativas adaptativas que se presentán a continuación. Para profundizar en estudio de las expectativas ver Bischi et al (2010).

4.1.1 Expectativas con racionalidad limitada

En este tipo de expectativas el agente no tiene información completa del mercado. Pero sí que tiene información de la variación del beneficio respecto a la variación del precio, por lo que sus decisiones están basadas en el beneficio marginal. Si éste es negativo reducirán el precio del producto mientras que si es posivo lo incrementarán. La dinámica de la racionalidad limitada adopta la siguente forma:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + \phi_1 p_1(t) \frac{\partial \Pi_1(t)}{\partial p_1} \\ p_2(t+1) = p_2(t) + \phi_2 p_2(t) \frac{\partial \Pi_2(t)}{\partial p_2} \end{cases} \quad \phi_1, \phi_2 > 0 \tag{25}$$

donde ϕ_1, ϕ_2, representan la velocidad de ajuste de los precios de cada una de las empresas.

4.1.2 Expectativas adaptativas

El comportamiento que adoptan los agentes bajo expectativas adaptativas corrige el error cometido en t, estableciendo para esto una combinación lineal entre el precio en t y el precio resultante de la función de mejor respuesta una vez conocido el precio establecido por el rival. La forma que adopta el modelo dinámico (22) es la siguiente:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = (1-v_1)p_1(t) + v_1 f(p_2(t)) \\ p_2(t+1) = (1-v_2)p_2(t) + v_2 g(p_1(t)) \end{cases} \quad 0 < v_1, v_2 < 1 \tag{26}$$

donde v_1, v_2 representa la ponderación en precios que realizan las empresas entre un comportamiento miope y el comportamiento que realizarían bajo expectativas ingenuas. Esto es, si $v_i \to 1$ la empresa i tiende a comportarse bajo expectativas ingenuas mientras que si $v_i \to 0$ el comportamiento tiende a ser miope. Entendemos un comportamiento miope como aquel en el que la empresa no incorpora la presencia de la empresa rival en la toma de decisiones.

4.2 El modelo dinámico

La demanda a la que se enfrentan las empresas en el momento t queda determinada por la siguiente expresión:

$$q_1(t) = a + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \tag{27}$$

$$q_2(t) = b + \frac{p_1(t) - p_2(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \tag{28}$$

Y las funciones de beneficio de las empresas en t son:

$$\Pi_1(p_1(t), p_2(t)) = p_1(t)q_1(t) = p_1(t)\left[a + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] \tag{29}$$

$$\Pi_2(p_1(t), p_2(t)) = p_2(t)q_2(t) = p_2(t)\left[b + \frac{p_1(t) - p_2(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] \tag{30}$$

donde los beneficios marginales quedan:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1(t)} = a + \frac{p_2(t) - 2p_1(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2(t)} = b + \frac{p_1(t) - 2p_2(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2} \tag{32}$$

Las funciones de mejor respuesta $p_1(p_2)$ para la empresa uno y $p_2(p_1)$ para la empresa dos se obtienen resolviendo el sistema:$(\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}, \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}) = (0, 0)$ tal y como establecen las condiciones de primer orden del problema de optimización. Resolviendo el sistema tenemos que las funciones de reacción en el momento t son:

$$p_1(p_2(t)) = \frac{1}{2}\left[c(l-a-b)(l+a-b) + p_2(t)\right] \tag{33}$$

$$p_2(p_1(t)) = \frac{1}{2}\left[c(l-a-b)(l+b-a) + p_1(t)\right] \tag{34}$$

4.2.1 Expectativas adaptativas

Tomando la formulación de las expectativas adaptativas en (26) y sustituyendo las funciones de reacción dadas en (33) y (34) el comportamiento de los agentes queda caracterizado por el siguiente sistema dinámico lineal

$$\begin{cases} p_1(t+1) = (1-v_1)p_1(t) + \frac{v_1}{2}p_2(t) + \frac{v_1}{2}\beta_1 \\ p_2(t+1) = (1-v_2)p_2(t) + \frac{v_2}{2}p_1(t) + \frac{v_2}{2}\beta_2 \end{cases} \tag{35}$$

donde $\beta_1 = c(l-a-b)(l+a-b)$ y $\beta_2 = c(l-a-b)(l+b-a)$, ambos positivos.

En el equilibrio ha de cumplirse que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i, i = 1, 2$. Sustituyendo en (35), el equilibrio en precios es el mismo que en el modelo original estático y resolviendo el sistema se obtiene

$$p_1^* = c\,(l-a-b)\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right)$$
$$p_2^* = c\,(l-a-b)\left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right)$$

que constituye el equilibrio de Nash.

4.2.1.1 Condiciones de estabilidad

La condición que ha de cumplirse para que este equilibrio estacionario sea asintóticamente estable es que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema (35) evaluada en p_1^*, p_2^* tengan módulo menor que uno [4].

La matriz jacobiana de (35) es:

$$J(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1-v_1 & \frac{v_1}{2} \\ \frac{v_2}{2} & 1-v_2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

En este caso la matriz jacobiana es constante y coincide con $J(p_1^*, p_2^*)$ al ser el sistema dinámico lineal. Como ya he señalado, existen unas condiciones que nos garantizan que los valores propios de (36) tengan módulo menor que uno, en términos de la traza y el determinante, son las *condiciones de Shur*.

$$H = 1 - D > 0 \tag{37}$$

$$F = 1 + T + D > 0 \tag{38}$$

$$TC = 1 - T + D > 0 \tag{39}$$

[4] véase Fernández (2003)

Si se cumplen estas condiciones se garantiza que los valores propios de la matriz jacobiana son menores que uno y consecuentemente se garantiza la estibilidad asintótica del equilibrio.

El determinante, $D \equiv det(J(p_1, p_2))$ y la traza $T \equiv Tr(J(p_1, p_2))$ de (35) son:

$$D = 1 - v_1 - v_2 + \frac{3}{4}v_1 v_2 \tag{40}$$

$$T = 2 - v_1 - v_2 \tag{41}$$

La primera de las condiciones a comprobar es que $H = 1 - D > 0$.

$$\begin{aligned} H &= 1 - D \\ &= v_1 + v_2 - \frac{3}{4}v_1 v_2 \\ &= v_1(1 - \frac{3}{4}v_2) + v_2 \end{aligned}$$

Es fácil ver $H = v_1(1 - \frac{3}{4}v_2) + v_2 > 0$ dado que $v_1, v_2 \in (0, 1)$, por lo que siempre se cumple (37).

La segunda de las condiciones de condiciones que se debe comprobar es que $TC = 1 - T + D > 0$. Donde TC es:

$$\begin{aligned} TC &= 1 - 2 + v_1 + v_2 + 1 - v_1 - v_2 + \frac{3}{4}v_1 v_2 \\ &= \frac{3}{4}v_1 v_2 \end{aligned}$$

También se cumple siempre que $TC > 0$.

La última de las condiciones que ha de ser comprobada es $F = 1 + T + D > 0$. El valor de F es:

$$\begin{aligned} F &= 1 + T + D \\ &= 1 + 2 - v_1 - v_2 + 1 + v_1 - v_2 + \frac{3}{4}v_1 v_2 \\ &= 4 - 2v_1 - 2v_2 + \frac{3}{4}v_1 v_2 \\ &= 2(2 - v_1 - v_2) + \frac{3}{4}v_1 v_2 > 0 \quad \textit{ya que: } v_1, v_2 \in (0, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto queda comprobado que el equlibrio de Nash es asintóticamente estable para cualquier par de localizaciones. Es decir, indistintamente de las localizaciones y para cualesquiera que fueran las condiciones iniciales, las trayectorias de los precios convergen a los precios de equilibrio. Así pues cualquier perturbación exógena que modifique los precios de equilibrio será corregida y los precios volverán al valor de equilibrio.

La convergencia hacia el equilibrio puede ser monótona u oscilante en torno al mismo. Ésto puede ser determinado atendiendo a los signos de los valores propios, λ_1, λ_2, asociados a la matriz (36) y a los valores iniciales que adquieran los precios.

La ecuación característica de (36), $|J(p_1, p_2) - \lambda I| = 0$, tiene como valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{2 - (v_1 + v_2) - \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2}}{2} \tag{42}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - (v_1 + v_2) + \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2}}{2} \tag{43}$$

estos valores propios (demostrada la estabilidad asintótica del equilibrio) toman valores entre menos uno y uno, $\lambda_i \in (-1, 1); i = 1, 2$. En particular tenemos que $\lambda_2 \in (0, 1)$, puesto que $2 - (v_1 + v_2) > 0$. Además $\lambda_1 < \lambda_2$ para cualquier valor de las ponderaciones v_1, v_2.

El signo de λ_1 queda determinado por el signo de $2 - (v_1 + v_2) - \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2}$, tal que:

$$\lambda_1 \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow 2 - (v_1 + v_2) - \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2} \lesseqgtr 0$$

resolviendo la inecuación tenemos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 \quad \textit{si:} \quad f(v_2) = \frac{4(1-v_2)}{4-3v_2} > v_1 \\ \lambda_1 < 0 \quad \textit{si:} \quad f(v_2) = \frac{4(1-v_2)}{4-3v_2} < v_1 \end{cases} \tag{44}$$

La convergencia será monótona si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Dado que $\lambda_2 > 0$ la convergencia será monótona cuando $\frac{4(1-v_2)}{4-3v_2} > v_1 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0$, indistintamente de los precios iniciales. Mientras que para $\frac{4(1-v_2)}{4-3v_2} < v_1 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ debemos atender a los valores iniciales de los precios para discernir entre convergencia monótona u oscilante.

Para ilustrar los casos anteriores se muestran las trayectorias temporales de los precios obtenidas al simular con el programa Mathematica 7 el sistema dinámico (35). En cada caso se especifica los parámetros y las condiciones iniciales.

En la figura 1 las trayctorias temporales de los precios, $p_i(t)$, presentan una convergencia monótona a los precios de equilibrio.

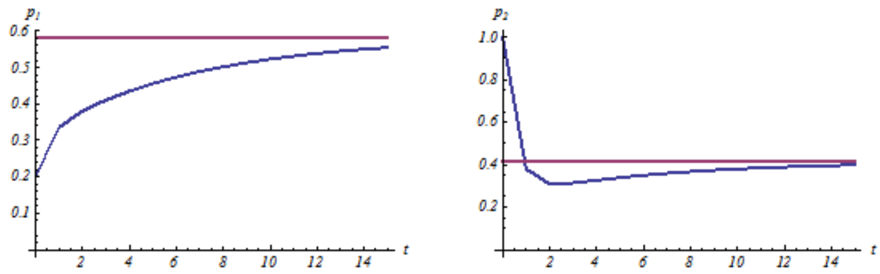


Figura 1: $l = 1; a = 0; 5; b = 0; v_1 = 0, 2; v_2 = 0, 8; p_1(0) = 0, 2; p_2(0) = 0, 8$

En la figura 2 el comportamiento de los precios es oscilante aunque también covergen al equilibrio.

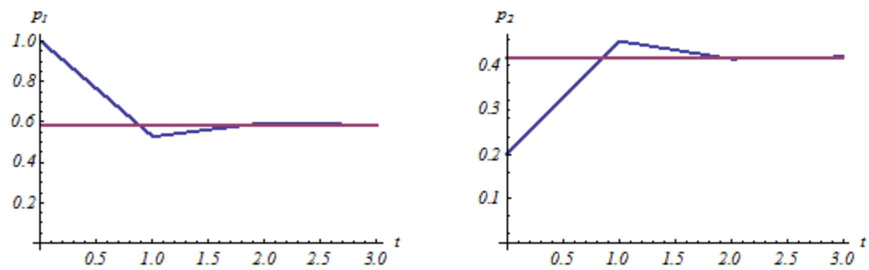


Figura 2: $l = 1; a = 0; 5; b = 0; v_1 = 0, 9; v_2 = 0, 6; p_1(0) = 0, 9; p_2(0) = 0, 6$

4.2.2 Expectativas con racionalidad limitada

En el caso de expectativas con racionalidad limitada el comportamiento de los agentes se concreta sustituyendo (31) y (32) en (25). La forma funcional que caracteriza el comportamiento de los agentes es un sistema discreto bidimensional no lineal. Este sistema determina la dinámica de precios y es:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + \phi_1 p_1(t) \left[a + \frac{p_2(t)-2p_1(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] \\ p_2(t+1) = p_2(t) + \phi_2 p_2(t) \left[b + \frac{p_1(t)-2p_2(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] \end{cases} \quad \phi_1, \phi_2 > 0 \tag{45}$$

En el estado estacionario se cumple que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i, i = 1, 2$, por lo tanto los equilibrios E quedan determinados por las combinaciones de precios que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \phi_1 p_1 \left[a + \frac{p_2-2p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] = 0 \\ \phi_2 p_2 \left[b + \frac{p_1-2p_2}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] = 0 \end{cases} \tag{46}$$

donde la única solución interior[5] del sistemas es:

$$E_1 = (p_1^*, p_2^*) = \left((l + \frac{a-b}{3})(l-a-b)c, (l + \frac{b-a}{3})(l-a-b)c \right)$$

que corresponde al equilibrio de Nash.

4.2.2.1 Condiciones de estabilidad

La condición que ha de cumplirse para que este equilibrio estacionario sea asintóticamente estable es que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema definido en (45) evaluada en E_1 tengan módulo menor que uno[6].

La matriz jacobiana $J(p_1, p_2)$ de (45) es:

$$J(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 + \phi_1 \frac{[(l+a-b)(l-a-b)c + p_2 - 4p_1]}{2c(l-a-b)} & \frac{\phi_1 p_1}{2c(l-a-b)} \\ \frac{\phi_2 p_2}{2c(l-a-b)} & 1 + \phi_2 \frac{[(l+b-a)(l-a-b)c + p_1 - 4p_2]}{2c(l-a-b)} \end{pmatrix} \tag{47}$$

Evaluando (47) en el equilibrio E_1:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 - \phi_1 \left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right) & \frac{\phi_1}{2}\left(l + \frac{1}{3}(a-b)\right) \\ \frac{\phi_2}{2}\left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right) & 1 - \phi_2 \left(l + \frac{1}{3}(b-a)\right) \end{pmatrix} \tag{48}$$

En aras de simplificar supondremos que $l = 1$ y que $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ por lo que (48) queda:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 - \phi \left(1 + \frac{1}{3}(a-b)\right) & \frac{\phi}{2}\left(1 + \frac{1}{3}(a-b)\right) \\ \frac{\phi}{2}\left(1 + \frac{1}{3}(b-a)\right) & 1 - \phi \left(1 + \frac{1}{3}(b-a)\right) \end{pmatrix} \tag{49}$$

Con objeto de comprobar la estabilidad asintótica del equilibrio estacionario se estudian a continuación las condiciones de Shur, presentadas en (37), (38) y (39).

Desarrollando la traza y el determinante tenemos que:

$$Det(J(E_1)) \equiv D = 1 - 2\phi + \frac{3}{4}\phi^2(1 - A^2) \tag{50}$$

$$Tr(J(E_1)) \equiv T = 2(1 - \phi) \tag{51}$$

Por simplicidad denotamos $A = \frac{1}{3}(a-b)$.

[5] Existen cuatro soluciones del sistema no lineal, las otras tres son soluciones esquina, $E_2 = (0,0), E_3 = (0, \frac{1}{2}c(l-a-b)(l+b-a)), E_4 = (\frac{1}{2}c(l-a-b)(l+a-b), 0)$

[6] Analizando la estabilidad de los equilibrio esquina obtenemos que son puntos de equilibrio inestables.

La primera de las condiciones que será comprobada es $TC = 1 - T + D > 0$ donde TC es:

$$\begin{array}{rcl} TC & = & 1 - 2(1-\phi) + 1 - 2\phi + \frac{3}{4}\phi^2(1-A^2) \\ & = & \frac{3}{4}\phi^2(1-A^2) \end{array} \tag{52}$$

Es fácil ver que $TC > 0$ si tenemos en cuenta que $A = \frac{1}{3}(a-b)$ y $|a-b| < 1$ supuesto $l = 1$.

Otra condición es que $H = 1 - D > 0$, en este caso desarrollando H tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} H & = & 1 - 1 + 2\phi - \frac{3}{4}\phi^2(1-A^2) \\ & = & \phi\left(2 - \frac{3}{4}\phi(1-A^2)\right) \end{array} \tag{53}$$

donde deducimos que $H > 0$ si y solo si:

$$2 - \frac{3}{4}\phi(1-A^2) > 0$$
$$\phi < \frac{8}{3(1-A^2)}$$

Por lo tanto:

$$H > 0 \Leftrightarrow \phi < \frac{8}{3(1-A^2)} \tag{54}$$

En el caso que las empresas se comporten de forma simétrica (caso que incluye los de mínima y máxima diferenciación) se tiene $a - b = 0$ y por tanto la condición queda $\phi < \frac{8}{3}$. Si una de las empresas se situara en el centro del mercado y la otra en uno de los extremos entonces $|a-b| = \frac{1}{2}$ y esta condición sería $\phi < \frac{96}{35} \simeq 2,7428$.

Por último la condición (38) $F = 1 + T + D > 0$ donde F :

$$\begin{array}{rcl} F & = & 1 + 2 - 2\phi + 1 - 2\phi + \frac{3}{4}\phi^2(1-A^2) \\ & = & 4 - 4\phi + \frac{3}{4}\phi^2(1-A^2) \end{array}$$

puede ser factorizada, dado que $\Delta = \sqrt{1+3A^2} \in \mathbb{R}$, en función de ϕ de tal manera que:

$$F = \left(\phi - \frac{8 - 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}\right)\left(\phi - \frac{8 + 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}\right) > 0$$

Dado que el coeficiente director $\frac{3}{4}(1-A^2) > 0$ los intervalos en los que $F > 0$ son:

$$F > 0 \Leftrightarrow \phi \in \left\{\left(0, \frac{8 - 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}\right) \cup \left(\frac{8 + 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}, \infty\right)\right\} \tag{55}$$

En síntesis y agrupando las condiciones (54) y (55) tenemos que el equilibrio es asitóticamente estable si se cumplen simultáneamente ambas restricciones, esto es:

$$\left\{\left(0, \frac{8 - 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}\right) \cup \left(\frac{8 + 4\sqrt{1+3A^2}}{3(1-A^2)}, \infty\right)\right\} \cap \left(0, \frac{8}{3(1-A^2)}\right) \tag{56}$$

Dado que el valor de ϕ que hace $H(\phi) = 0$ está comprendido entre los valores para los que $F < 0$, el intervalo en el que $H > 0$ y $F > 0$ es:

$$\phi \in \left(0, \frac{8 - 4\sqrt{1 + 3A^2}}{3(1 - A^2)}\right) \tag{57}$$

En el caso particular de simetría, y por lo tanto contemplando el caso de máxima diferenciación, el intervalo de ϕ en los que el equilibrio de Nash es asintóticamente estable es:

$$\phi \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

resultado del que se deduce que a pesar de que las empresas tiendan a diferenciarse lo máximo posible, bajo los supestos de $l = 1, \phi_1 = \phi_2 = \phi$, existen velocidades de ajuste en el mecanismo de fijación de precios incompatibles con la estabilidad asintótica en precios.

Por lo tanto el principio de máxima diferenciación no se ve comprometido puesto que las empresa maximizan su beneficio situándose en los extremos del mercado.

Como ilustración a las posibles trayectorias temporales mostramos cuatro simulaciones del sistema dinámico (45) suponiendo máxima diferenciación, $a = b = 0$.

En la figura 3 se muestra una situación de convergencia a los precios de equilibrio.

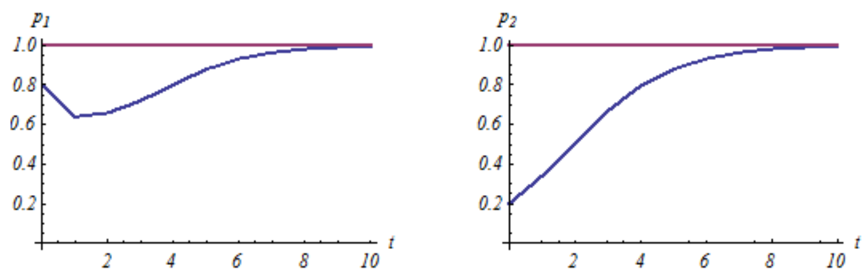


Figura 3: $l = 1; a = 0; b = 0; \phi = 1; p_1(0) = 0,8; p_2(0) = 0,2$

En la figura 4 y 5 la condición de $F > 0$ es la única que no se satisface. Se observa que el equilibrio de Nash no es asintóticamente estable apareciendo oscilaciones en torno a él. [7]

La regularidad de estas oscilaciones puede variar segun los valores parámetrico. Se observa mayor irregularidad en la figura 5.

[7]Para $\phi = \frac{4}{3}$ se produce un bifuración de Flip. Este tipo de bifuración se produce cuando $F = 0$ pero $TC >=$ y $H > 0$ (uno de los valores propios es menos uno). Asociados a esta bifurcación pueden aparecer ciclos de orden $2, 4, 8, ...$ o dinámicas más complejas como la de la figura 5.

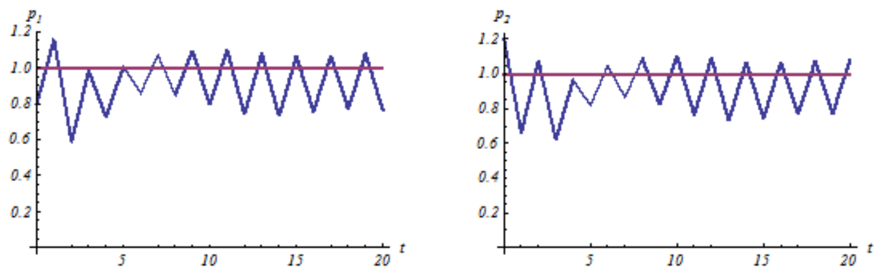


Figura 4: $l = 1; a = 0; b = 0; \phi = 1,5; p_1^0 = 0,8 p_2^0 = 1,2$

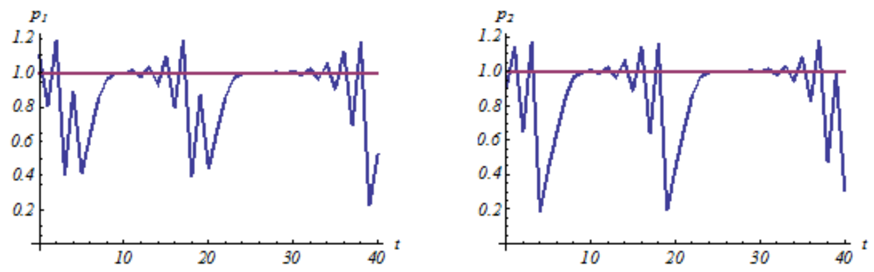


Figura 5: $l = 1; a = 0; b = 0; \phi = 1,8; p_1(0) = 1,1; p_2(0) = 0,9$

En la figura 6 se muestra un equilibrio inestable. Como se puede apreciar claramente el comportamiento de los precios tiene un carácter explosivo.

En este caso se verifica que $H < 0$ y $F < 0$.

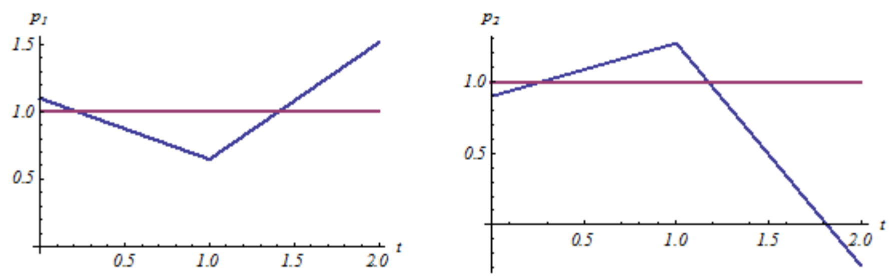


Figura 6: $l = 1; a = 0; b = 0; \phi = 2,743$; $p_1(0) = 1,1; p_2(0) = 0,9$

Estas figuras representan una pequeña parte de las posibles trayectorias temporales ya que, variaciones en la elección de los parámetros o de los valores iniciales, modificarían las trayectorias temporales de los precios.

La variable A^2 puede ser interpreda como el grado de simetría en localizaciones de las empresas, de tal manera que si las empresas adoptan una posición simétrica tenemos que, $a = b \Rightarrow A^2 = 0$ y para cualquier par de localizaciones en las que $a \neq b$ (el valor de $A^2 > 0$) el comportamiento de los agentes es asimétrico.

Con el objeto de discernir la variación del límite superior de (57) cuando varía el grado de asimétria A^2 definimos la función $\bar{\phi}$ como:

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(A^2) = \frac{8 - 4\sqrt{1 + 3A^2}}{3(1 - A^2)} \tag{58}$$

con lo que la condición (57) queda como $\phi \in (0, \bar{\phi})$. La variación de $\bar{\phi}$ cuando varía A^2 esta caracterizada por el signo de $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial (A^2)}$. Diferenciando respecto a A^2 (por comodidad $A^2 = x$)

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{4\sqrt{1 + 3x} - 3x - 5}{2\sqrt[3]{1 + 3x}} \tag{59}$$

El signo de $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial (x)}$ dependerá del signo de $M = 4\sqrt{1 + 3x} - 3x - 5$.

Se tiene que $M < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 > 0$. Por formación de cuadrados tenemos que $3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$ y consecuentemente $M < 0$ para cualquier x, concluyendo que:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial (A^2)} < 0 \tag{60}$$

La interpretación de $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial (A^2)} < 0$ es que a mayor (menor) simetría en el comportamiento de las empresas el valor máximo de la velocidad de ajuste de los precios compatible con el equilibrio aumenta (disminuye). Es decir, el rango de valores en los que la velocidad de ajuste de los precios es compatible con el equilibrio es más restrictivo conforme mayor sea la asimetría.

Una de las aplicaciones del modelo de Hotelling gira en torno a las estrategias de negocio. Supongamos que las empresas deben realizar una inversión en la primera etapa y en la segunda competirán en precios. Dependiendo del nivel de inversión acaparan mayor o menor cuota de mercado.

La estrategia del *perrito faldero* consiste en realizar una pequeña inversión en la primera etapa abasteciendo así un nicho del mercado que le permita comportarse como un monopolista en la segunda etapa. La competencia en precios en la segunda etapa es poco agresiva.

En cambio en la estrategia del *perro flaco y hambriento* el nivel de inversión inicial es muy elevado con la pretensión de acaparar la mayor parte del mercado posible. La competencia en la etapa de precios será muy agresiva.

La estrategia de *perrito faldero* es identificada con el principio de máxima diferenciación y la estrategia de *perro flaco y hambriento*, con el principio de mínima diferenciación.

Interpretando $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial (A^2)} < 0$ en términos de estrategias de negocio, un comportamiento asimétrico en las estrategias de negocio inducirá condiciones mucho más restrictivas sobre las velocidades de ajuste de los precios compatibles con el equilibrio, dotando así al sistema de mayor grado de inestabilidad. Mientras que estrategias simétricas permiten que la velocidad de ajuste del precio compatible con el equilibrio sea mayor.

4.2.3 Expectativas Heterogéneas

En esta sección se plantea el problema teniendo en cuenta que los agentes se comportan de forma diferente a la hora de decidir su comportamiento frente al futuro. Uno de ellos adopta expectavivas adaptativas y el otro, racionalidad limitada.

La razón por la cual podemos suponer que las empresas adoptan formulaciones diferentes en la generación de expectativas, la encontramos al suponer o bien un contexto evolutivo en el cual una de las empresas modifica el proceso que genera las expectativas o si consideramos la existencia de una empresa que lleva menos tiempo en el mercado y tiene menor información que la rival.

Suponiendo que la empresa A se comporta bajo expectativas de racionalidad limitada frente a la empresa B, con un comportamiento bajo expectativas adaptativas, tenemos que el sistema dinámico de formación de precios resulta ser no lineal:

$$\begin{cases} p_1(t+1) &= p_1(t) + \phi p_1(t)\left[a + \frac{p_2(t)-2p_1(t)}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] \\ p_2(t+1) &= (1-v)p_2(t) + \frac{v}{2}p_1(t) + \frac{v}{2}\beta \end{cases} \tag{61}$$

donde $\beta = c(l-a-b)(l+b-a)$.

Teniendo en cuenta que en el equilibrio se cumple que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i$, $i = 1, 2$, los precios de equilibrio son aquellos que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \phi_1 p_1\left[a + \frac{p_2-2p_1}{2c(l-a-b)} + \frac{l-a-b}{2}\right] &= 0 \\ \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}\beta - p_2 &= 0 \end{cases} \tag{62}$$

La solución interior del sistema la encontramos en el par de precios[8]

$$E_1 = (p_1^*, p_2^*) = \left((l + \frac{a-b}{3})(l-a-b)c, (l + \frac{b-a}{3})(l-a-b)c\right)$$

[8]Existen dos soluciones al sistema (62) la otra solución es esquina $E_2 = (0, \frac{1}{2}c(l-a-b)(l+b-a))$ que es inestable.

4.2.3.1 Condiciones de estabilidad

Sabemos que si el módudo de los valores propios de la matriz jacobiana de (61) evaluada en el punto fijo es menor que uno éste será asintóticamente estable. La matriz Jacobiana $J(p_1, p_2)$ de (61) es:

$$J(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} 1-\phi\frac{[(l+a-b)(l-a-b)c+p_2-4p_1]}{2c(l-a-b)} & \frac{\phi p_1}{2c(l-a-b)} \\ \frac{v}{2} & 1-v \end{pmatrix} \tag{63}$$

evaluando en E_1 tenemos que:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1-\phi\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right) & \frac{\phi}{2}\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right) \\ \frac{v}{2} & 1-v \end{pmatrix} \tag{64}$$

Gracias a las condiciones de Shur, definidas en (37), (38) y (39), podemos caracterizar el comportamiento del equilibrio de Nash. Por tanto debemos comprabar si $H = 1-D > 0$, $F = 1+T+D > 0$ y $TC = 1-T+D > 0$.

Siendo:

$$D = 1-v+\phi\left(1-\frac{5}{4}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right) \tag{65}$$

$$T = 2-v+\phi\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right) \tag{66}$$

La primera de las condiciones $H = 1-D > 0$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= 1-D \\ &= v+\left[1-\frac{3}{4}v\right]\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)\phi \end{aligned}$$

Dado que $(1-\frac{3}{4}v) > 0, v \in (0,1)$ se garantiza la condición $H > 0$.

La siguiente de las condiciones por comprobar es $TC = 1-T+D > 0$ que adquiere la siguiente expresión:

$$TC = 1-T+D = \frac{3}{4}\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)\phi \tag{67}$$

El resultado es $TC > 0$ para cualquier valor de las variables (a, b) y los parámetros(ϕ, v). Tan solo resta comprobar la condición $F = 1+T+D > 0$.

$$F = 1+T+D \tag{68}$$

$$\quad = 4-2v-\left(2-\frac{3}{4}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)\phi \tag{69}$$

Despejando y expresando la desigualdad en términos de ϕ para $F > 0$ se tiene que cumplir que:

$$\phi < \frac{2\,(2-v)}{\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)} \tag{70}$$

En conclusión el equilibrio de Nash es asintóticamente estable si:

$$\phi \in \left(0, \frac{2\,(2-v)}{\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)}\right) \tag{71}$$

Para ilustrar las posibles posibles trayectorias temporales se muestran dos simulaciones del sistema (61) bajo el supuesto de máxima diferención, $a = b = 0$.

En la figura 7 mostramos un caso de convergencia a los precios de equilibrio.

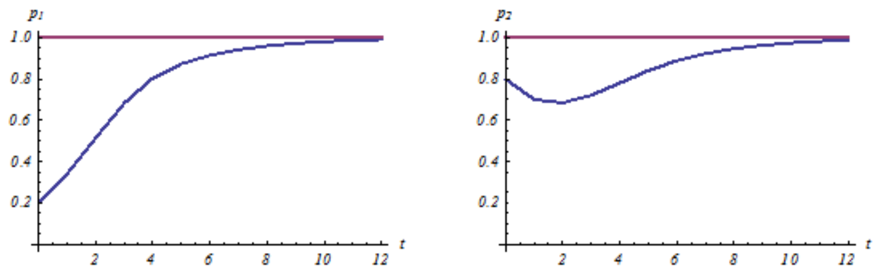


Figura 7: $l = 1; a = 0; b = 0; v = 0,5; \phi = 1; p_1(0) = 0,2; p_2(0) = 0,8$

En la figura 8 no se satistace la condición $F > 0$ con lo que las condiciones de estabilidad asintótica del equilibrio de Nash no se satisfacen. El comportamiento en la figura 8 es un comportamiento complejo.

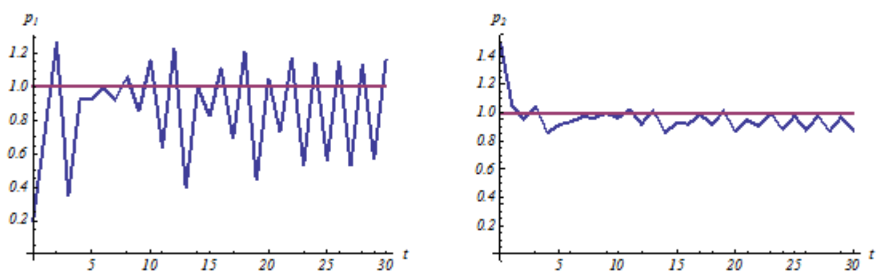


Figura 8: $l = 1; a = 0; b = 0; v = 0,5; \phi = 2,5; p_1(0) = 0,2; p_2(0) = 1,5$

Para otra configuración en los valores iniciales o en los parámetros del modelo las trayectorias temporales de los precios cambiaría por lo que estas figuras han de considerarse como una ilustración.

Con el propósito de analizar la variación que se produce en el límite superior en el cual el equilibrio es asintóticamente estable cuando varían los parámetros definimos la función $\bar{\phi}$ como:

$$\bar{\phi}(l, v, a, b) = \frac{2\,(2-v)}{\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)} \tag{72}$$

Si diferenciamos $\bar{\phi}$ respecta a l tenemos que:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial l} = -\frac{2\,(2-v)}{\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)^2} \tag{73}$$

es facil ver que $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial l} < 0$

La interpretación de $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial l} < 0$ es que ante incrementos en l el valor máximo de ϕ en el que el equilibrio es asintóticamente estable disminuye. Es decir, conforme se incrementa el tamaño del mercado o aparecen variedades potenciales en el mercado, la velocidad de ajuste de los precios debe ser inferior que en el caso con un número menor de variedades o más próximas en términos espaciales.

Respecto a $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial v}$ tenemos que:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial v} = -\frac{1}{2(2-\frac{3}{4}v)^2\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)} < 0 \tag{74}$$

Respecto a la $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial v} < 0$ podemos decir que ante incrementos de v el intervalo en el que el equilibrio es asintóticamente estable disminuye.

Los valores extremos de v caracterizan comportamientos de miopía o un comportamiento ingenuo. Por lo que si la empresa tiende a comportarse bajo expectativas ingenuas la velocidad de ajuste de la empresa rival compatibles con el equilibrio es menor.

La empresa miope tiende a considerar que el precio que establece no influye en el mercado, se convierte por tanto en un seguidor.

El comportamiento miope permite que la velocidad de ajuste de los precios de la empresa rival sea mucho más rápida manteniendose la estabilidad en precios.

Respecto a la variación de $\bar{\phi}$ cuando varía a tenemos que:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a} = -\frac{2\,(2-v)}{3\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)^2} \tag{75}$$

Claramente $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial a} < 0$, por lo que cuando la empresa a diferencia su producto lo máximo posible los valores de ϕ son mayores.

Por último diferenciando $\bar{\phi}$ respecto a b

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial b} = \frac{2\,(2-v)}{3\left(2-\frac{2}{3}v\right)\left(l+\frac{1}{3}(a-b)\right)^2} \tag{76}$$

En este caso tenemos que $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial b} > 0$ por lo que cuanto más se aleje la empresa b del extremo l mayores podrán ser los valores de la velocidad de ajuste compatibles con la estabilidad asintótica del equilibrio.

Por lo tanto el valor de la velocidad de ajuste compatible con la estabilidad asintótica del equilibrio aumentará conforme la empreasa con expectativas adaptativas tienda a diferenciarse lo mínimo posible, es decir, se sitúe en el centro del mercado.

Teniendo en cuenta la relación entre la velociadad de ajuste ϕ y las localizaciones de las empresas. La localización de las empresas para las cuales el valor de la velocidad de ajuste compatible con la estabilidad asintótica del equilibrio es máxima son la maxíma diferenciación para la empresa con expectativas con racionalidad limitada y la mínima diferenciación para la empresa con expectativas con racionalidad limitada. Esto es $(a,b) = (0, \frac{l}{2})$.

Por lo que en expectativas heterogéneas el principio de máxima diferenciación no representa el caso en el cual el valor de ϕ se hace máximo sino un caso intermedio en el rango de posibles valores de la velocidad de ajuste compatibles con la estabilidad del equilibrio.

Este resultado no implica la ruptura del principio de máxima diferenciación puesto que las empresas optimizan su beneficio conforme diferencian sus productos.

El caso en el que la localización de las empresas fuera $(a,b) = (0, \frac{l}{2})$ se justificaría atendiendo únicamente a criterios de estabilidad del sistema. Supongamos que la empresa a se sitúa en la localización correspondiente al principio de máxima diferenciación y que tiene una velocidad de ajuste cercana al límite de estabilidad. Bajo esta hipótesis la empresa b sacrifica parte de los beneficios que le proporcionaría la máxima diferenciación en aras de alcanzar un rango mayor de valores en la velocidad de ajuste compatible con el equilibrio.

Otro tipo de combinaciones en el espacio paramétrico puede darse suponiendo casos límite.

5 CONCLUSIONES

A lo largo de los diferentes apartados se explota el modelo dinámico de Hotelling con costes cuadráticos arrojando diferentes resultados en función de la formulación empleada en las expectativas de precios.

Concretando bajo expectativas adaptativas tenemos que la convergencia en precios se produce para cualquier par de localizaciones. En particular y teniendo en cuenta el resultado de D'Aspremont et al (1979) en el que se cumple el principio de máxima diferenciación queda asegurada la estabilidad del equilibrio.

Otro resultado obtenido son los valores de las ponderaciones para los cuales la convergencia a los precios de equilibrio es monótona u oscilante.

Si consideramos expectativas con racionalidad limitada se garantiza la estabilidad de los precios en un entorno del equilibrio para un rango concreto de velocidades de ajuste y sean las que fueran las localizaciones. Fuera de este rango de las velocidades de ajuste el equilibrio es inestable. Por lo que la estabilidad en precios, teniendo presente el principio de máxima diferenciación, se produce si y solo si las velocidades de ajuste están dentro del rango de valores de estabilidad.

Otra de las conclusiones que arroja la adopción de expectativas con racionalidad limitada es que existe una relación inversa entre la amplitud del rango de valores en los que las velocidades de ajuste son compatibles con la estabilidad en precios y la asimetría en la diferenciación de las empresas.

La aplicación de este resultado a las estrategias de negocio induce a considerar que las estrategias simétricas son aquellas que dotan al sistema de mayor grado de estabilidad.

Respecto al resultado bajo expectativas heterogéneas tenemos que el equilibrio es asintóticamente estable imponiendo ciertas restricciones.

Uno de los resultados es que existe una relación inversa entre el valor máximo de la velocidad de ajuste compatible con la estabilidad asintótica del equilibrio y la amplitud del mercado. Conforme aparecen variedades potenciales o se expande el tamaño del mercado el rango de valores en la velocidad de ajuste compatibles con el equilibrio se estrecha.

Atendiendo al comportamiento del agente miope frente al ingenuo, tenemos que las posibilidades de estabilidad se amplían conforme se comporta de forma miope y se reducen en caso de que el comportamiento tienda hacia las expectativas ingenuas.

Considerando las posiciones de las empresas las localizaciones propias del principio de máxima diferenciación no son el par de localizaciones que aportan el mayor grado de estabilidad al sistema. El par de localizaciones que aporta mayor estabilidad en términos del rango de valores son la máxima diferenciación para la empresa a y el de la mínima diferenciación para la empresa b.

Este resultado no invalida el principio de máxima diferenciación, simplemente restringe las velocidades de ajuste compatibles con el equilibrio.

Englobando todos los resultados y en líneas generales tenemos que podemos encontrar valores en el espacio paramétrico para los cuales se garantiza la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash.

En particular el principio de máxima diferenciación se afianza como resultado y no ha sido encontrado ningún caso en el que categóricamente no exita la posibilidad de equilibrio.

Tanto en el modelo con expectativas heterogéneas como en el de racionalidad limitada encontramos valores de los parámetros para los que aparece inestabilidad o dinámica compleja. En cualquier caso este tipo de comportamiento se produce si las velocidades de ajuste de los precios son lo suficientemente grandes.

Este trabajo no puede considerarse un trabajo completo sino un punto de partida. Como futuras líneas de trabajo cabe la generalización de las expectativas con racionalidad limitada extendiendo los párametros al caso general. Atendiendo al comportamiento complejo de la dinámica para ciertos valores de los parámetros las posibilidades de profundizar son muy amplias.

Respecto a la especificación del modelo podría ser generalizada la función de costes a una especificación mucho más general. Otra de las posibles líneas de trabajo podría considerar que los consumidores no se distribuyen uniformenente a lo largo de la calle o romper el supuesto de demanda inelástica. Si consideremos el número de jugadores podría ampliarse a más de dos. Las posibilidades del modelo claramente no están agotadas y son múltiples.

Al observar el comportamiento de las variables en las figuras con dinámica compleja se aprecia un comportamiento errático. Este comportamiento, a pesar de que es generado por un proceso determinista, aparentemente se muestra como un proceso estocástico. Es decir, parece que las variables están sometidas a un shock externo de carácter aleatorio. Pensando en otras disciplinas, en particular en econometría, sería interesante considerar el modelo dinámico con el objeto de obtener los parámetros que permitieran predecir el comportamiento de los precios en sectores particulares de la economía en los que se dé la diferenciación horizontal del producto.

La innovación que plantea este trabajo es la incorporación de dinámica al modelo de Hotelling. En este sentido puede ser utilizado como un documento de trabajo a partir del cual desarrollar otras variantes en el modelo.

Con la realización de este trabajo he tenido la oportunidad de profundizar en el análisis formal de un modelo económico en un marco dinámico. En particular este trabajo me ha permitido afianzar un concepto clave en la teoría económica como son las expectativas. La formalización de las expectativas a la teoría económica incrementó las posibilidades de aproximarse a la realidad desde un punto de vista teórico. En este trabajo he podido aprehender con mayor profundidad el concepto de expectativa y además he aprendido a modelar dos tipos de las mismas, de las que combinadas nace una tercera.

Además el equilibrio de Nash se ha extendido a un contexto puramente dinámico, lo cual me ha llevado a explorar la idea de equilibrio de Nash asintóticamente estable o inestable y me ha permitido descubrir que existen comportamientos que aparecen como erráticos pero son de naturaleza determinista. De igual modo he podido determinar las condiciones que han de cumplirse para que el equilibrio sea asintóticamente estable.

Al profundizar en el modelo de Hotelling me ha permitido vislumbrar la importancia que adopta dicho modelo en la teoría microeconómica como se da el caso en la teoría de la diferenciación horizontal del producto. Como consecuencia también me ha permitido descubrir y afianzar conceptos en la difereciación del producto, tanto horizontal como vertical.

Referencias

[1] ANDALUZ, J (1995) ≪ Competencia en localización y precios: Influencia de los costes de transporte ≫ *Cuadernos aragoneses de economía*, Vol 5, nº 2, pp 343-358.

[2] BISCHI, G.I., CHIARELLA, C., KOPEL, M., SZIDAROVSKY,F (2010) *Nonlinear Oligopolies Stability and Bifurcations* Springer

[3] BOULDING, K. (1966) ≪ Economic Analysis≫. vol 1 *Microeconomics*, Harpers, New York.

[4] D'ASPREMONT, C; J. GABSZEWICZ; J.F. THISSE (1979) ≪On Hotelling's Stability in Competition≫ *Econometrica*, vol. 47,nº 5,pp 1145-1150

[5] EATON, B.C.; LIPSEY, R.G. (1975) ≪ The principle of minimun diferentation reconsidered: Somo news developments in the theory of spatial competition≫ *Review of Economic Studies* vol. **42** nº **129** pp 27-29

[6] ECONOMIDES , N (1984) ≪The principle of minimun diferentation revisited≫ *European Economic Review* nº **24** pp 345-368.

[7] ESPINOSA, M.P. (1989) ≪ Competencia Espacial: Una introducción a los Juegos de Localización y Precios≫ *Departamento de Análisis Económico e Instituto de Economía Pública* Universidad del País Vasco.

[8] FANTI, L.; GORI, L.(2013), ≪ Stability Analysis in Bertrand Duopoly with Different Product Quality an Heterogeneous≫. *J Ind Compet Trade* Expectations nº: **13** pp 481-501

[9] FERNÁNDEZ P., VÁZQUEZ H., Y VEGAS M (2003), ≪Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: Sistemas Dinámicos≫, Thomson, Madrid

[10] GABSZEEWICZ, J.J. Y J.F. THISSE (1986A) ≪On the nature of competition with differentiated products≫ *The Economic Journal* nº **96** pp 160-172.

[11] GANDOLFO, G Y (2010) ≪ Economic Dynamics≫ Springer.

[12] HOTELLING,H (1929) ≪Stability in Competition≫ *The Economic Journal*, **39** pp 41-57.

[13] LANCASTER, K (1979) « Variety, Equity an Efficiency» Oxford: Basil Blackwell.

[14] TRAMONTANA, F.(2010) « Heterogeneous duopoly with isoelastic demand function» *Economic Modelling (2010)* n^{o}:**27** pp 350-357